

# **Laboranleitung**

# **Photonischer Kristall**

Versuchsanleitung von  
Andreas Pichler e0442851  
Gerold Aschinger e0627801

## **Aufgaben**

Bestimmen Sie die Gitterebenenabstände im photonischen Kristall  
Messen Sie die Transmissionskurve des photonischen Kristalls  
Weisen Sie die Störstellenleitung nach

## Inhaltsverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| Inhaltsverzeichnis .....                      | 2  |
| Zweck der Versuche .....                      | 3  |
| Protokoll .....                               | 3  |
| Theorie .....                                 | 3  |
| Der photonische Kristall .....                | 3  |
| Die photonische Bandlücke .....               | 4  |
| Bragg-Reflexion .....                         | 12 |
| Allgemeines .....                             | 12 |
| Herleitung .....                              | 13 |
| Anwendung auf photonischen den Kristall ..... | 13 |
| Weiterführende Berechnungen .....             | 14 |
| Defekte .....                                 | 15 |
| Praxis .....                                  | 17 |
| Versuchsaufbau .....                          | 17 |
| Geräte .....                                  | 17 |
| Funktionsweise .....                          | 17 |
| Bragg-Reflexion .....                         | 19 |
| Vorbereitungen .....                          | 19 |
| Durchführung der Messung .....                | 19 |
| Auswertung .....                              | 20 |
| Transmission durch den Kristall .....         | 20 |
| Störstellenleitung .....                      | 21 |
| Quellenangaben .....                          | 24 |

## Zweck der Versuche

Die Versuche beschäftigen sich mit dem photonischen Kristall. Die Studenten sollen dieses aktuelle Forschungsgebiet kennen lernen. Weiters haben die Studenten bei diesem Laborplatz die Möglichkeit mit Mikrowellen zu arbeiten. Es werden die Gitterebenenabstände des Kristalls mittels Braggreflexion bestimmt und verschiedene Transmissionskurven aufgezeichnet und ausgewertet.

Man informiere sich unbedingt **vor Praktikumsbeginn** über die im Theorieteil beschriebenen Effekte!

## Protokoll

Während der Durchführung der Versuche ist auch ein Protokoll zu verfassen. Bitte beachten Sie diesbezüglich auch das Informationsblatt am Anfang der Laborübungen. Beschreiben Sie im Protokoll in einigen Sätzen je Versuch wie Sie dabei vorgegangen sind, was Sie dabei beobachtet haben und wie Sie es interpretieren. Zusätzlich sind bei den quantitativen Messungen die Messergebnisse samt Auswertung und Diskussion zu dokumentieren (Erläuternde Handskizzen z.B. von Oszilloskopbildern sind selbstverständlich erwünscht.). Beim Laborplatz wird auch ein USB-Stick zur Verfügung stehen auf den man sich die Oszilloskopbilder sichern kann.

## Theorie

### Der photonische Kristall

Als photonischen Kristall bezeichnet man eine Anordnung mit räumlich periodischer Dielektrizität. Diese Variation der Dielektrizität wird durch Kombination von mindestens zwei Materialien unterschiedlicher Dielektrizität erreicht. Je nachdem in wie vielen Raumrichtungen diese Variation vorliegt, unterscheidet man zwischen 1, 2 und 3-dimensionalen photonischen Kristallen:

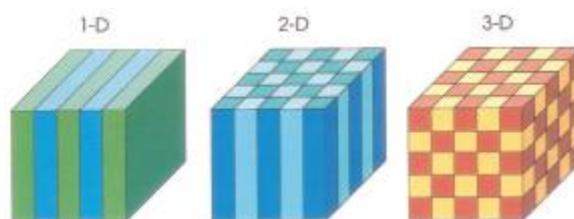


Abb.1: 1, 2 und 3-dimensionale photonische Kristalle [5]

Im Praktikum ist ein 2-dimensionaler photonischer Kristall aufgebaut. Dabei sind die Stellen hoher Dielektrizität durch Keramik-Stäbchen, die Stellen niedriger Dielektrizität durch Luft realisiert. Die Struktur des photonischen Kristalls wird wie bei jedem anderen Kristall durch die Basisvektoren der Elementarzelle des Kristallgitters beschrieben. Diese Basisvektoren werden im weiteren Verlauf mit  $\vec{R}$  bezeichnet. Die wichtigste Eigenschaft photonischer Kristalle ist die photonische Bandlücke, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

## Die photonische Bandlücke

Durch die periodische Variation der Dielektrizitätskonstante und damit auch des Brechungsindex im photonischen Kristall (es gilt für nichtmagnetische, nicht absorbierende Materialien  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , mit  $n$ = Brechungsindex,  $\varepsilon$ = relative Dielektrizitätskonstante) kommt es zur Ausbildung einer photonischen Bandlücke. Das bedeutet, dass gewisse Frequenzen der einfallenden Welle total am Kristall reflektiert werden. Bandlücken sind aber an eben diese Variation der Dielektrizitätskonstanten gebunden, das heißt sie existieren nur in jene Richtungen, in denen die Periodizität vorliegt. In unserem Fall eines 2-dimensionalen photonischen Kristalls bedeutet das, dass wir Bandlücken nur in Ebenen parallel zur Grundplatte des Kristalls nachweisen können, nicht aber normal dazu.

Die Entstehung von Bandlücken wollen wir uns zuerst am Beispiel eines 1-dimensionalen photonischen Kristalls klar machen.

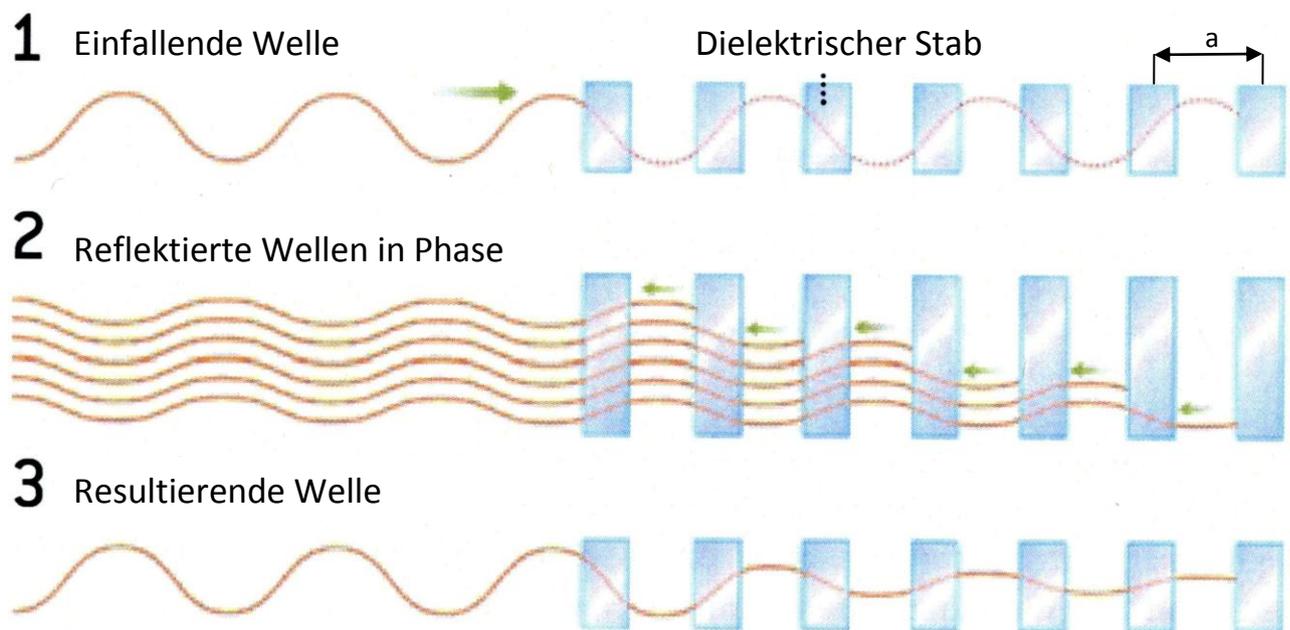


Abb.2.: zur Erklärung der Bragg-Reflexion [2]

[4] Ein 1-dimensionaler photonischer Kristall ist eine periodische Anordnung zweier Schichten verschiedener Dielektrizität hintereinander, ein so genannter „Bragg-Stack“. Die Ursache für die Ausbildung einer Bandlücke bei einer solchen Anordnung ist die Bragg-Reflexion. Für den Einfall der elektromagnetischen Welle senkrecht zu den Kristallebenen lautet die Bragg-Bedingung für ein Maximum der reflektierten Intensität:

$$m * \lambda = 2 * a$$

Wobei  $m$  eine natürliche Zahl,  $\lambda$  die Wellenlänge der einfallenden Welle und  $a$  der Ebenenabstand ist.

Die Bragg-Gleichung kann man sich leicht plausibel machen wenn man bedenkt, dass die dielektrischen Schichten als Streuzentren wirken. An diesen Schichten werden einfallende EM-Wellen vorwärts (in Einfallsrichtung) und rückwärts (gegen Einfallsrichtung) gestreut. Das Maximum der reflektierten Intensität kommt nun dadurch zustande, dass die an 2 benachbarten

Schichten zurück gestreuten Wellen genau den Gangunterschied  $m \cdot 2\pi$  haben. Dadurch kommt es bei den zurück gestreuten Wellen zu konstruktiver Interferenz und somit zu einem Maximum der zurück gestreuten (reflektierten) Intensität. Ein Maximum der reflektierten Intensität bedeutet natürlich nach dem Energieerhaltungssatz ein Minimum der durchgelassenen Intensität und damit eine Bandlücke.

[3] Jetzt wollen wir noch anhand dieses einfachen 1-dimensionalen Beispiels die sogenannte Bandstruktur des photonischen Kristalls näher erläutern. Zuerst wenden wir uns der Dispersionsrelation im Vakuum zu. Die Dispersionsrelation verknüpft ja immer die Kreisfrequenz  $\omega$  einer Welle mit der Wellenzahl  $k$ . In diesem Fall lautet sie  $\omega(k) = c \cdot k$ , was gleichbedeutend ist mit  $c = \lambda \cdot f$ . Die Dispersionsrelation ist also in einem  $\omega(k)$  Diagramm eine Gerade mit der Steigung  $c$ , wobei  $k$  auch negativ sein kann, wenn die Welle in negative  $x$ -Richtung fließt.

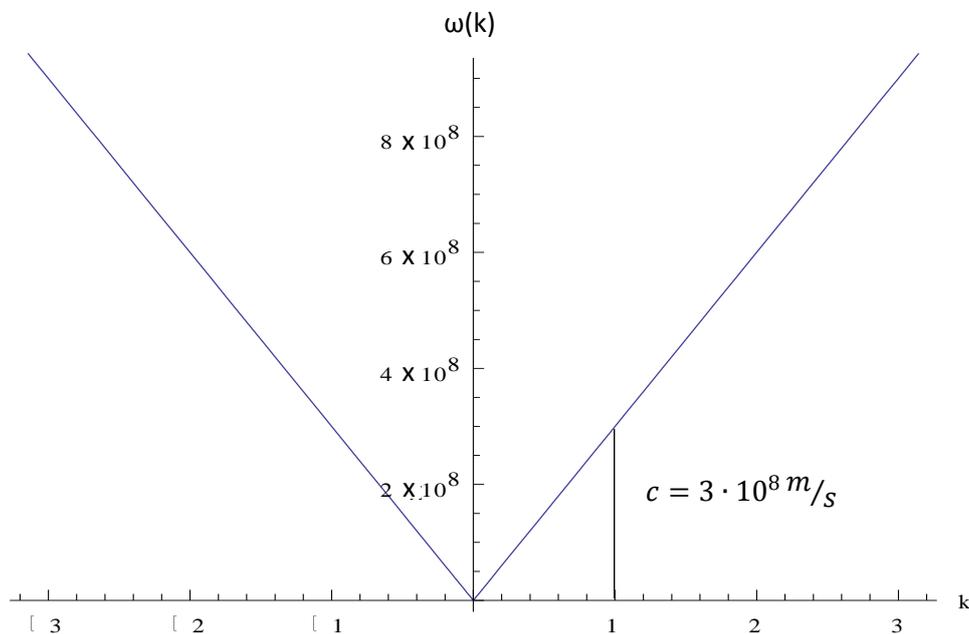


Abb.3.: Dispersionsrelation im Vakuum

[7] Wie sieht nun die Dispersionsrelation für einen in  $x$ -Richtung 1-dimensional ausgedehnten photonischen Kristall mit der Gitterperiode  $a$  aus? Offensichtlich kann sie nicht so aussehen wie im Vakuum, da einige Frequenzen ja in der Bandlücke liegen, also in der Dispersionsrelation nicht vorkommen. Für  $\lambda = 2a$ , das heißt  $k = \frac{\pi}{a}$  (wie in der obigen Bragg-Bedingung), entsteht durch Bragg-Reflexion an den dielektrischen Schichten eine stehende Welle (was nicht im Widerspruch zu unserer obigen Aussage steht, dass bei  $\lambda = 2a$  Totalreflexion auftritt!). Weil zum Beispiel eine nach rechts laufende Welle die Bragg-Reflexion erfährt nach links weiter läuft und umgekehrt, lässt sich die daraus entstehende stehende Welle als Überlagerung von nach rechts und nach links laufender Welle schreiben. Man kann aus diesen beiden Wellen 2 unterschiedliche Linearkombinationen, also 2 unterschiedliche stehende Wellen, bilden:

$$\vec{E}_+ \cong e^{\frac{i\pi x}{a}} + e^{-\frac{i\pi x}{a}} \cong \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\vec{E}_- \cong e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{-\frac{i\pi x}{a}} \cong \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Dies sieht dann folgender Maßen aus:

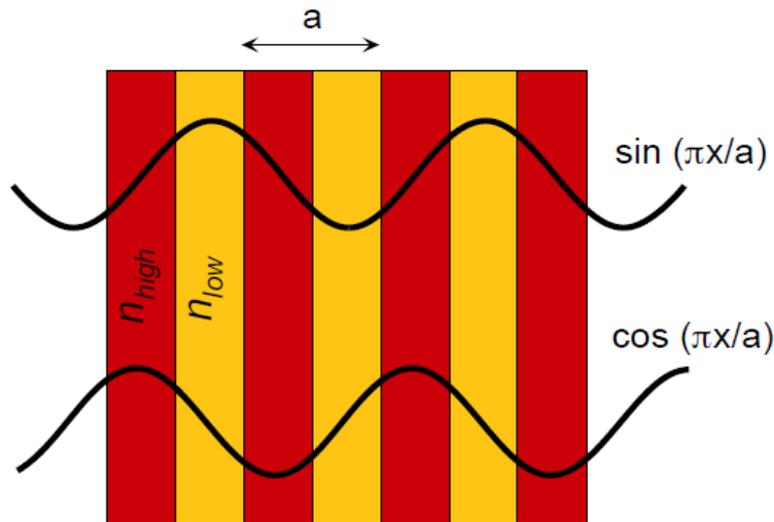


Abb.4: 2 unterschiedliche stehende Wellen im Kristall [3]

Die Intensitätsverteilung dieser Wellen sieht dann so aus:



Abb.5: Intensitätsverteilung im Kristall [5]

Da sich, wie man hier sieht, die Intensität einer Welle größten Teils im Bereich von hohem Brechungsindex (bzw. Dielektrizität) befindet und die der anderen Welle im Bereich von niedrigem Brechungsindex, die Wellenlängen aber ident sind, haben die beiden Wellen unterschiedliche Frequenz. Denn:

$$f = \frac{c}{\lambda n}$$

Wobei  $f$  die Frequenz,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $n$  der Brechungsindex ist. Bei gleicher Wellenlänge und unterschiedlichem Brechungsindex unterscheidet sich also die Frequenz. Dadurch gibt es im Kristall bei  $\lambda = 2a$  zwei Wellen mit unterschiedlicher Frequenz; die Vakuum-Frequenz dieser Wellenlänge wird aber total reflektiert! Die Frequenzen gleich unter und über der Bandlücke bilden, wie oben gezeigt, stehende Wellen, alle anderen erlaubten Frequenzen bilden laufende Wellen.

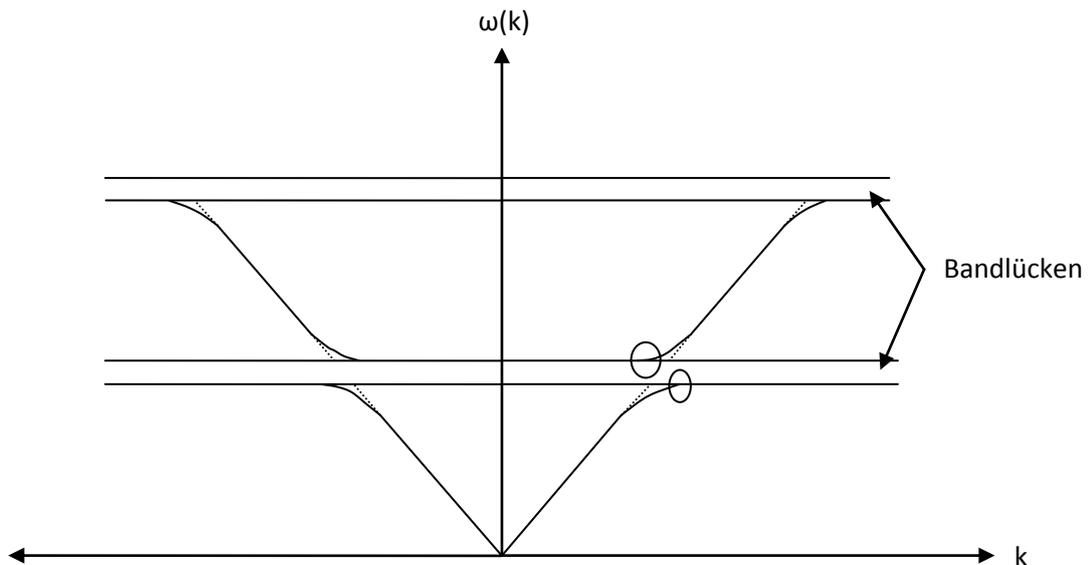


Abb.6: Dispersionsrelation im 1-dimensionalen photonischen Kristall

Wie man im obigen Diagramm sieht ist eine Bandlücke also eine im Kristall nicht erlaubte Frequenz. Die Dispersionsrelation „biegt“ am Rand der Bandlücke ab. In der obigen Grafik sind 2 Punkte an denen sich stehende Wellen ausbilden eingekreist. Die 2. Bandlücke gehört zur Wellenlänge  $\lambda=a$ , weitere Bandlücken wären an  $\lambda = \frac{2a}{m}$  mit  $m$  ganzzahlig. Solche Diagramme sind aber in der Praxis unhandlich, da große  $\vec{k}$  bzw.  $\omega$  Werte sehr weit draußen liegen.

Um dies zu umgehen, muss man wissen, dass zwei Wellenvektoren  $\vec{k}$ , die sich um einen reziproken Gittervektor des Kristallgitters unterscheiden, in diesem Gitter dieselbe zeitunabhängige Lösung der Wellengleichung liefern (auf diese Lösung wird weiter unten noch eingegangen)!

Ein reziproker Gittervektor  $\vec{G}$  ist ein Basisvektor des sogenannten reziproken Gitters. Für ihn gilt:  $\vec{G}_i * \vec{R}_j = 2\pi * \delta_{i,j}$ , wobei  $\vec{R}$  der Gittervektor des realen Gitters und  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Delta (hat den Wert 0, wenn die Indizes verschieden sind und den Wert 1 wenn sie gleich sind) darstellt. Die Indizes  $i$  und  $j$  der Vektoren nummerieren die Basisvektoren des realen beziehungsweise des reziproken Gitters durch. Die Formel bedeutet also, dass das innere Produkt zwischen einem Gittervektor des realen und des reziproken Gitters

- 0 ergibt, wenn sich die Indizes nicht gleichen; sie sind also normal zu einander
- $2\pi$  ergibt, wenn sich die Indizes gleichen; sie sind dann parallel zu einander

In unserem 1-dimensionalen Fall lautet die obige Formel  $G * R = 2\pi$ . Man kann sogar die Vektorpfeile weglassen und durch Beträge ersetzen, da wir uns im 1-dimensionalen Raum befinden. Damit können wir den reziproken Gittervektor im obigen Beispiel leicht berechnen. Aus  $G = a$  folgt  $R = \frac{2\pi}{a}$ . Jetzt haben wir weiter oben gesagt, dass die zeitunabhängige Lösung der Wellengleichung für Wellenvektoren, die sich um einen reziproken Gittervektor unterscheiden, ident ist. Daraus folgt, dass es reicht, nur einen bestimmten Teil aller möglichen  $\vec{k}$ -Vektoren zu

betrachten, der gerade die Breite  $\frac{2\pi}{a}$  hat. In diesem Bereich kommen alle möglichen zeitunabhängigen Lösungen vor. Man nimmt meistens den Bereich symmetrisch um  $\vec{k} = 0$ . Diesen Bereich bezeichnet man als 1. Brillouin-Zone des reziproken Gitters. Sie geht in unserem Fall von  $\vec{k} = -\frac{\pi}{a}$  bis  $\vec{k} = +\frac{\pi}{a}$ . Mit diesem Wissen können wir die Bänder mit  $|\vec{k}| > \frac{\pi}{a}$  in die erste Brillouin-Zone „hinein falten“, wie es in folgender Abbildung dargestellt ist:

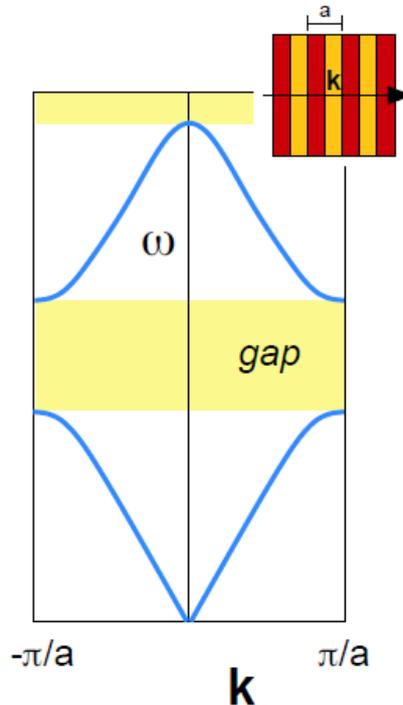


Abb.7: Bandstruktur bzw. Dispersionsrelation des Kristalls [3]

Dieses Diagramm ist so zu verstehen, dass die Punkte oberhalb der Lücke vorher außerhalb der hier dargestellten 1. Brillouin-Zone waren. Der Abstand auf der  $k$ -Achse eines Punktes oberhalb der Lücke zu seinem ursprünglichen Punkt beträgt genau  $\frac{2\pi}{a}$  (also einen reziproken Gittervektor), das heißt der rechte obere Ast im Diagramm ging ursprünglich vom linken Rand nach links oben und umgekehrt. Man nennt die Punkte im obigen Diagramm die von vornherein in der 1. Brillouin-Zone gelegen sind auch 1. Band. Jene Punkte, die zuerst außerhalb dieser Zone, also in der 2. Brillouin-Zone gelegen sind, das 2. Band usw. Dass für einen  $\vec{k}$ -Vektor nun mehrere Frequenzen möglich sind bedeutet, dass die zeitunabhängige Lösung ident ist, nur die Phasengeschwindigkeit unterschiedlich ist!

## Laboranleitung photonischer Kristall

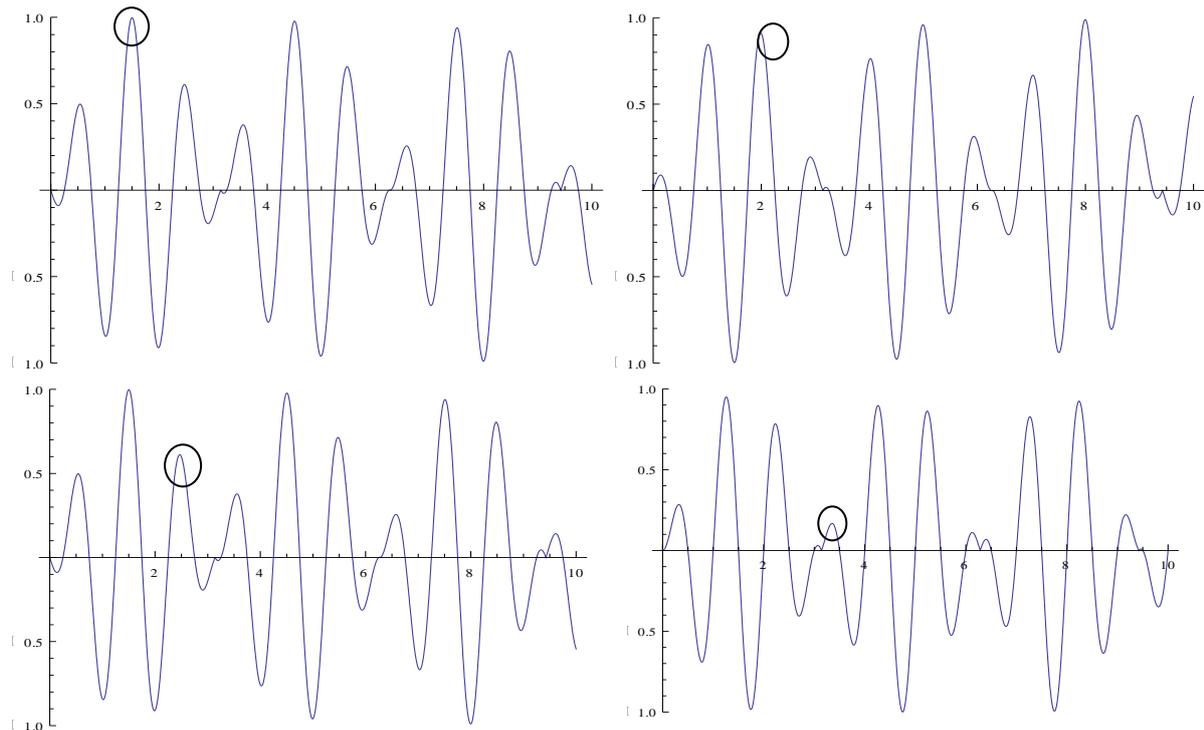


Abb.8: laufende Welle mit  $k=2\pi$ ,  $\omega=2\pi$  und Gitterperiode  $a=\pi$  zu verschiedenen Zeitpunkten

Die Abbildung soll das oben Gesagte illustrieren: Diese Bilder könnten zu unterschiedlichen  $k$ -Vektoren gehören, die sich um einen reziproken Gittervektor unterscheiden, also im obigen Banddiagramm Punkte einnehmen, die sich untereinander befinden. Unterscheiden lässt sich das nur an der Ausbreitungsgeschwindigkeit des markierten Maximums, also an der Phasengeschwindigkeit.

[5] Nun ein Überblick über die mathematische Herleitung der Bandstruktur:

Zuerst müssen wir einige Annahmen tätigen:

- Die Dielektrizitätskonstante ist isotrop und frequenzunabhängig
- Die verwendeten Materialien sind nicht magnetisierbar ( $\mu=1$ ) und zeigen keine Absorption

Es gilt im Weiteren:

$$\vec{D} = \varepsilon * \varepsilon_0 * \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu * \mu_0 * \vec{H}$$

Unter diesen Voraussetzungen lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla * \varepsilon(\vec{r}) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla * \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Dabei gilt:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Aus den beiden Rotationsgleichungen kann man nun die Wellengleichungen für das E und das H Feld ableiten. Diese lauten:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) \right] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Dabei wurde folgende Beziehung verwendet:

$$\mu_0 * \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Wir rechnen nur mit dem H-Feld weiter, weil E und H-Feld in einander über die Maxwell-Gleichungen umrechenbar sind. Wir machen den Ansatz für harmonische Wellen:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) * e^{i\omega t}$$

Die Wellengleichung für das H-Feld lautet nun nach abseparieren der zeitlichen Abhängigkeit:

$$\nabla \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r})$$

Betrachtet man diese Gleichung als Operatorgleichung, so stellt sie ein Eigenwertproblem für das magnetische Feld dar, mit  $\frac{\omega^2}{c^2}$  als Eigenwert. Das Problem der Lösung dieser Wellengleichung bei periodischer Dielektrizität ist analog zur Lösung der Schrödingergleichung für Elektronenwellen im periodischen positiven Potenzial der Ionen in einem Festkörper. Aus der Festkörperphysik ist bekannt, dass alle Lösungen der Schrödingergleichung eines solchen Problems die Form von sogenannten Blochwellen haben. Als Lösungsansatz für den ortsabhängigen Teil des H-Felds erweisen sich Blochwellen auch als geeignet. Sie haben die Form:

$$\vec{H}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} * \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Wobei  $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$  ebenso wie  $\varepsilon(\vec{r})$  eine gitterperiodische Funktion ist. Das bedeutet, dass sie bei Translation um einen Gittervektor den Wert nicht ändert. Der Vektor  $\vec{k}$  ist der Wellenvektor. Der

Faktor  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  stellt einen Phasenfaktor dar, der sich in Richtung und mit der Wellenlänge der einfallenden Welle ändert. Diese zeitunabhängige Lösung ist es, die für k-Vektoren, die sich um einen reziproken Gittervektor unterscheiden, ident ist (wie oben besprochen).

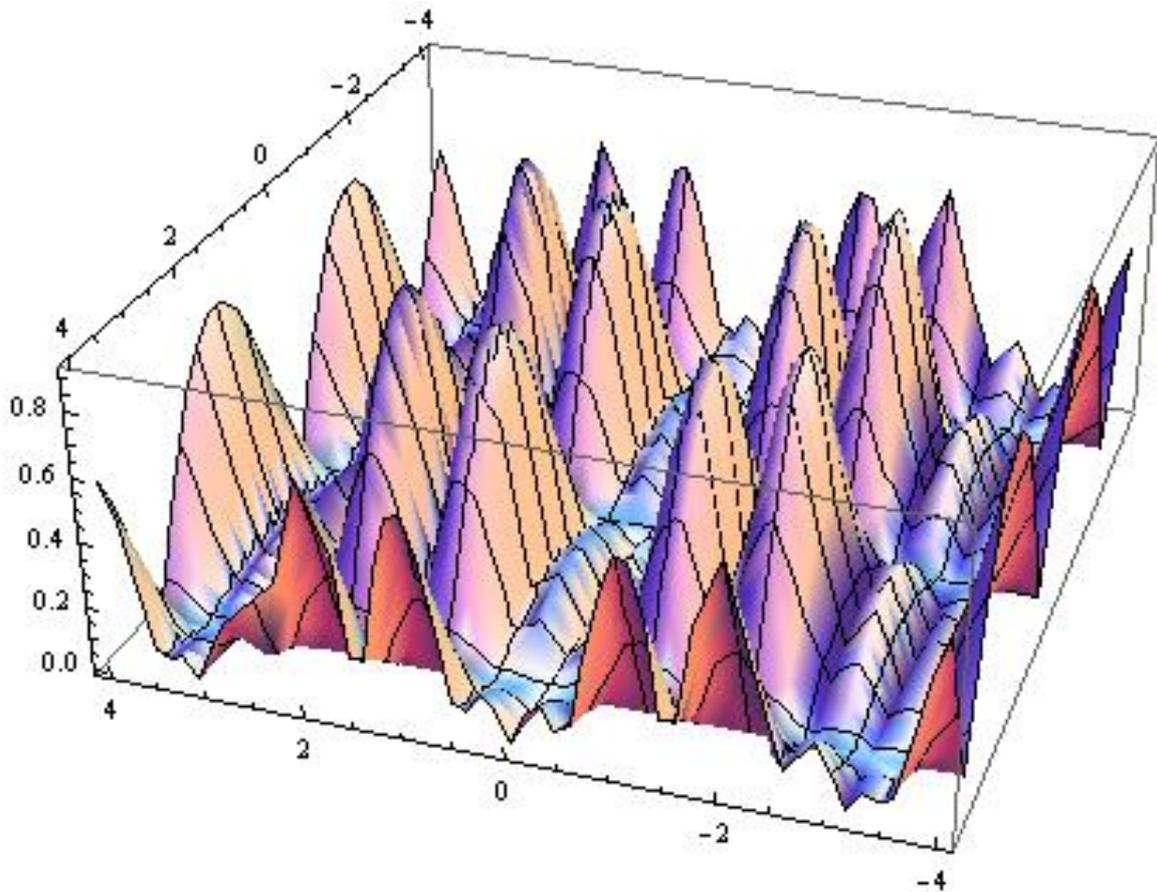


Abb.9: mögliche Blochwelle

Die Grafik stellt einen möglichen sogenannten Blochzustand für den Betrag von  $\vec{H}$  in einem quadratischen Gitter in einer Ebene dar. Dabei kann die hohe Amplitude sowohl im Bereich hoher als auch niedriger Dielektrizität liegen. Der Wellenvektor ist in dem Fall  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ , der Gitterabstand ist  $\pi$ .

Setzt man nun den Blochwellenansatz in die Wellengleichung für das H-Feld ein so ergibt sich

$$(i\vec{k} + \nabla) \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} (i\vec{k} + \nabla) \times \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Nun muss man noch für jeden Wellenvektor die 2 gitterperiodischen Funktionen  $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$  und  $\varepsilon(\vec{r})$  Fourier entwickeln in ein trigonometrisches Basissystem. Dabei ist  $\varepsilon(\vec{r})$  ja bekannt und hat daher bekannte Koeffizienten,  $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$  ist die gesuchte Funktion und hat daher zunächst unbekannte Koeffizienten. Damit erhält man, nach einsetzen der Fourier Reihen in die Differentialgleichung, durch Koeffizientenvergleich ein algebraisches Gleichungssystem, aus dessen Koeffizientendeterminante man die Eigenwerte  $\frac{\omega^2}{c^2}$  beziehungsweise daraus  $\omega$  für den jeweiligen Wellenvektor bestimmen kann. Zu jedem Wellenvektor gibt es unendlich viele Eigenfrequenzen  $\omega$ , die jeweils zu einem Band der Bandstruktur gehören. Dann kann man noch die zu einem Eigenwert  $\omega$  gehörenden Eigenfunktionen  $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$  und daraus das H-Feld berechnen.

Es genügt aber, diese Berechnungen für k-Vektoren in der 1.Brillouin-Zone anzustellen, da sich wie gesagt die zeitunabhängigen Lösungen, also die H und E-Felder, periodisch außerhalb dieser Zone wiederholen. Trägt man nun die Kreisfrequenz abhängig von Wellenvektor und Bandindex auf, so ergibt sich folgendes Bild:

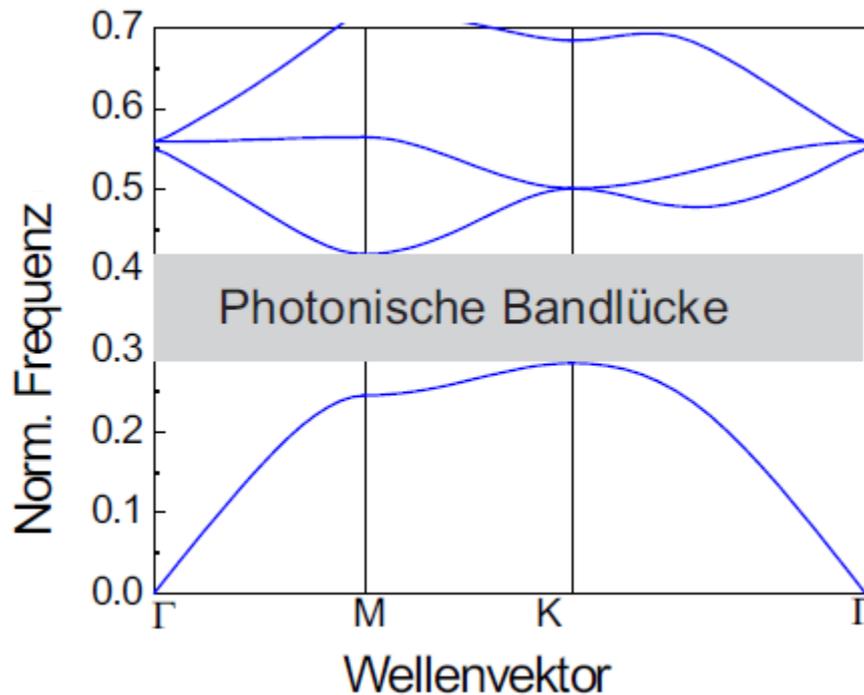


Abb.10: reale Bandstruktur eines 2-dimensionalen Kristalls [4]

Man sieht, dass gewisse Kreisfrequenzen für keinen Wellenvektor erlaubt sind. Dieser verbotene Bereich ist die Bandlücke. Die Beschriftung der Wellenvektor-Achse steht für verschiedene Richtungen im 2-dimensionalen Kristall. Außerdem sieht man, dass die verschiedenen  $\omega$ -Eigenwerte (also die Bänder) kontinuierliche Funktionen von  $k$  sind. Ein Band ist also nichts anderes, als ein bestimmter Eigenwert (erster, zweiter, ...) der obigen Gleichung, aufgetragen als Funktion des Wellenvektors.

Das Phänomen der photonischen Bandlücke ist sehr ähnlich dem der Halbleiter. Im Halbleiter gibt es zwischen Valenzband und Leitungsband auch einen für die Elektronenwellen nicht erlaubten Energiebereich (entspricht in unserem Fall dem gesperrten Frequenzbereich). Im Halbleiter kommt diese Energielücke durch das periodische Potenzial der Ionenrümpfe zustande, welches die Analogie zu der periodischen Dielektrizität im photonischen Kristall darstellt.

## Bragg-Reflexion

### Allgemeines

[1] Bei der Bragg-Reflexion handelt es sich um eine experimentelle Methode zur Strukturbestimmung von kristallinen Festkörpern. Das Verfahren beruht auf der Beugung und Interferenz der in den zu untersuchenden Körper eingestrahelten Welle. Dabei ist notwendig, dass die Wellenlänge  $\lambda$  der eingestrahelten Welle kleiner als der Atomabstand  $d$  im Festkörper ist.

Als Sonden kommen Elektronen-, Neutronen-, Röntgenstrahlen und neutrale Atome zum Einsatz.

## Herleitung

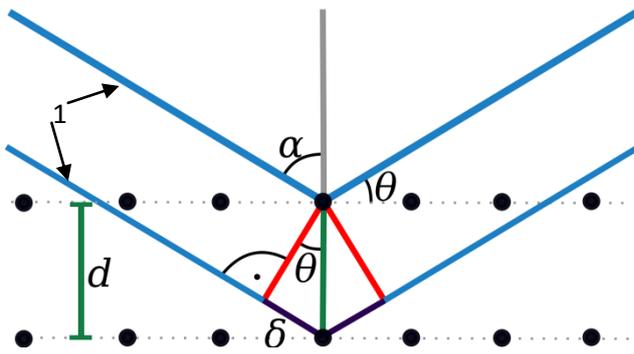


Abb.11: Geometrische Herleitung

Die einfallenden Linien (1) stellen monochromatische Strahlen dar, die schräg auf den Kristall treffen. In Abbildung 1 erkennt man sehr gut, dass der untere der beiden Strahlen (1) einen längeren Weg zurücklegt als der obere. Der Wegunterschied beträgt genau  $2\delta$ . Soll es zu konstruktiver Interferenz kommen, muss der Wegunterschied zwischen den Strahlen (1) ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein, also

$$2\delta = n \cdot \lambda$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Des Weiteren kann man aus Abbildung 1 folgern, dass  $\delta = d \cdot \sin\theta$  gilt. Setzt man nun diesen Ausdruck für  $\delta$  in die obere Formel ein, erhält man die Bragg-Bedingung:

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin\theta$$

## Anwendung auf photonischen den Kristall

Betrachtet man den photonischen Kristall stellt man fest, dass er aus einem Gitter gleichseitiger Dreiecke (sog. hexagonales Gitter) aufgebaut ist, was aber nichts an der Bragg-Bedingung ändert. Sie bleibt trotzdem gültig.

Im Praxisteil wird dann eine Aufgabe darin bestehen, den Gitterebenenabstand mittels Bragg-Reflexion zu ermitteln und daraus mit dem Satz von Pythagoras die Seitenlänge eines solchen gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, also den Abstand zwischen den einzelnen Stäbchen.

Bevor man aber beginnt, Braggpeaks bei irgendwelchen Frequenzen zu suchen, sollte man die Überlegung anstellen, ob der zur Verfügung stehende Mikrowellenbereich überhaupt Wellenlängen zulässt, bei denen Maxima auftreten.

HINWEIS: Mit dem Lineal Gitterebenenabstand ungefähr ausmessen und mittels Bragg-Bedingung ermitteln, bei welcher Frequenz und somit bei welcher Wellenlänge  $\lambda$  man bei welchem Winkel ein Maximum finden wird. Tipp: Bei  $n = 1$ , also 1. Ordnung berechnen.

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda}{2d}\right)$$

Setzt man jetzt  $n = 1$  und misst beispielsweise  $d = 4\text{mm}$  folgt daraus:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1 \cdot \lambda}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}\right)$$

Das Argument des Arkussinus muss aus dem Intervall  $[-1, 1]$  sein. Da hier nur positive Werte vorkommen aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot \lambda}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} < 1$$

muss erfüllt sein, somit

$$\lambda < 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

Bekanntlich gilt  $c = \lambda \cdot f$  also  $\lambda = \frac{c}{f}$ . Dieser Ausdruck wird oben eingesetzt und man erhält:

$$\frac{c}{f} < 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

$$f > \frac{c}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}$$

$$f > \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}$$

$$f > 3,75 \cdot 10^{10} = 37,5 \cdot 10^9 = 37,5 \text{ GHz}$$

Das heißt, misst man 4mm Gitterebenenabstand, braucht man erst bei Frequenzen über 37,5 GHz Maxima suchen.

Die 37,5 GHz entsprechen einer Eingangsspannung von 8,16 V, das heißt, man könnte in diesem Fall beispielsweise bei 8,5 V, bei 9 V und bei 9,5 V suchen.

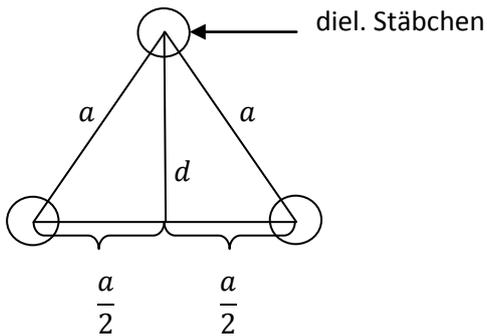
### Weiterführende Berechnungen

Wie die Suche nach Maxima genau durchzuführen ist wird im Praxisteil der Angabe beschrieben. Kurz noch ein paar Hinweise für die Berechnung des Abstands zwischen zwei Stäbchen:

Wie bereits oben erwähnt, besteht der Kristall aus einer periodischen Anordnung gleichseitiger Dreiecke. Wurde bei einer bestimmten Frequenz ein Maxima gefunden, ist die Bragg-Bedingung bis auf  $d$  bestimmt, da man ja  $\lambda = \frac{c}{f}$  aus der Frequenz berechnen kann, den Winkel  $\theta$  bei der Messung bestimmt hat und  $n=1$  betrachtet. Das heißt, man kennt  $d$ :

$$d = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot \sin \theta}$$

Somit kann man  $a$  mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen:



$$a = \sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} d$$

Abb.12: Seitenlängenberechnung

Der Abstand  $a$  zwischen den Stäbchen ist also leicht durch Messen von  $d$  und einer kurzen Berechnung bestimmbar.

## Defekte

[4] Durch einbringen von Defekten, also Änderungen der periodischen Struktur, in den photonischen Kristall, kann man seine Eigenschaften verändern. In unserem Fall eines 2-dimensionalen photonischen Kristalls, kann man punktförmige oder linienförmige Defekte einbringen.

Punktförmige Defekte lassen sich realisieren, indem man die Dicke eines dielektrischen Stäbchens des Kristalls vergrößert oder verkleinert. In beiden Fällen hat das zur Konsequenz, dass für einen bestimmten Wellenvektor eine Frequenz erlaubt ist, die im perfekten Kristall verboten war. Durch Variation des Defektdurchmessers lässt sich diese Frequenz innerhalb der Bandlücke verschieben.

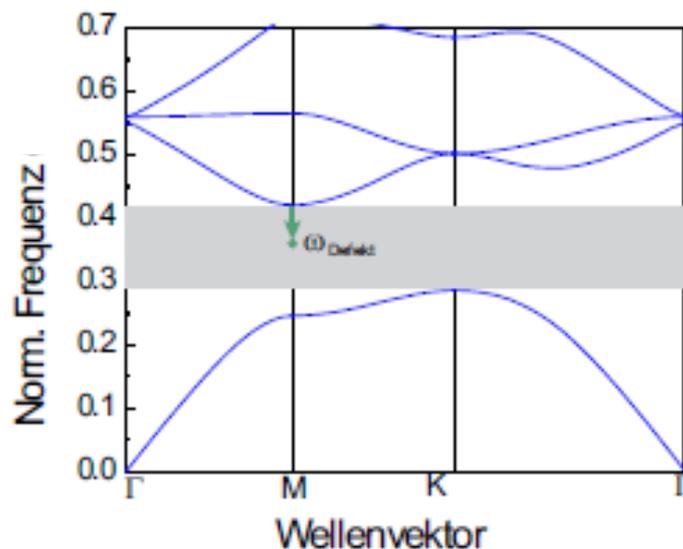


Abb.13: Bandstruktur eines Kristalls mit Defekt [4]

Eine Welle mit der Defektfrequenz kann nur im Bereich des Defekts existieren, da sie sich nicht in den Rest des Kristalls ausbreiten kann, weil die Frequenz ja dort verboten ist. Die Amplitude fällt in Richtung Kristall exponentiell ab und ist somit am Defekt lokalisiert.

Ordnet man Punktdefekte hintereinander an, so ergibt sich eine linienförmige Störstelle. So eine Störstelle ist bei unserem Kristall fix eingebaut. Wie bei den Punktdefekten kommt es bei Liniendefekten auch dazu, dass eine vorher verbotene Frequenz innerhalb der Störstelle erlaubt ist. Dadurch, dass diese Frequenz im Rest des Kristalls nicht erlaubt ist, kann man sie innerhalb der Störstelle führen.

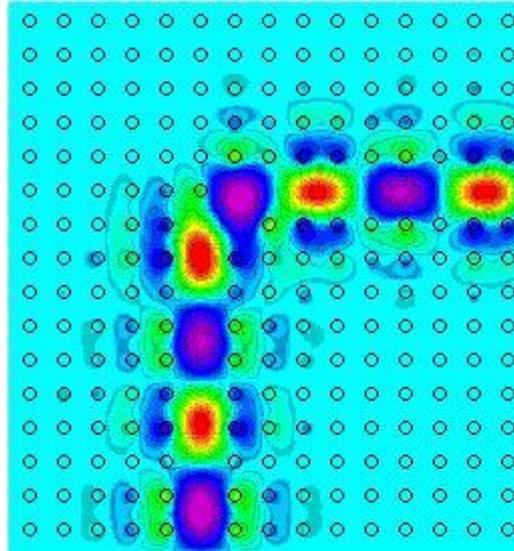


Abb.14: elektromagnetische Welle mit Defektfrequenz breitet sich im Kristall aus [2]

Die Abbildung zeigt die Ausbreitung einer EM Welle innerhalb der Störstelle. Die Farben geben Auskunft über die Amplitude der Welle.

Diese Störstellenleitung ist eine sehr wichtige Eigenschaft photonischer Kristalle. Damit ist es möglich, EM Wellen um weit engere Kurven zu führen (ca. auf der Skala der Wellenlänge der verwendeten Welle) als dies bisher der Fall war. Konventionelle Wellenleiter arbeiten mit Totalreflexion. Bei diesen Kabeln ist es nicht möglich, die Welle um eine Kurve mit kleinem Radius zu führen, da sonst der Auftreffwinkel zu spitz wird und der Grenzwinkel der Totalreflexion nicht mehr eingehalten werden kann. Die Welle tritt dann aus dem Kabel aus. Der Einsatz von photonischen Kristallen würde diesem Problem Abhilfe schaffen und zum Beispiel ermöglichen, ganze Schaltkreise auf engstem Raum mit Photonen statt bisher mit Elektronen zu realisieren.

## Praxis

### Versuchsaufbau

#### Geräte

Der Versuch ist bereits im Labor fertig aufgebaut. Die wichtigsten Bestandteile sind der eigentliche Versuchsapparat mit den drehbaren Armen, auf denen sich die Hörner und das Oszilloskop befinden. Weiters wird ein Rampengenerator benötigt und ein Netzgerät für den Yttrium-Iron-Garnet-(YIG)-Oszillator. Der Sender sendet eine elektromagnetische Welle aus, die vom Empfängerhorn aufgenommen und von der Elektronik in ein der empfangenen Leistung proportionales Ausgangssignal umgewandelt wird.

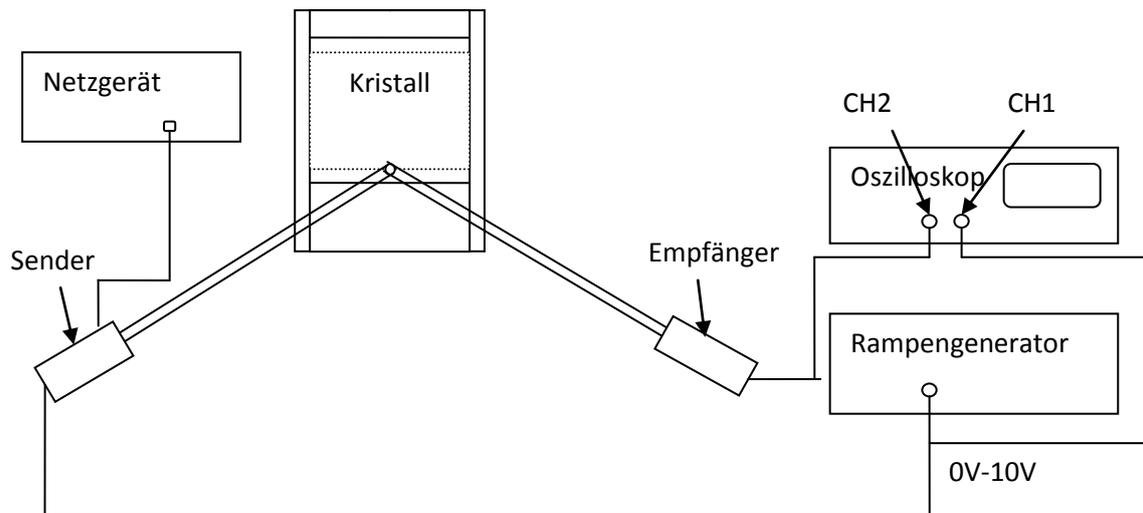


Abb.15: Versuchsaufbau

#### Funktionsweise

Es ist für die folgenden Versuche grundlegend ein Frequenzspektrum aufnehmen zu können. Um das zu gewährleisten, kommen ein Rampengenerator und ein Oszilloskop zum Einsatz. Der YIG-Oszillator im Senderarm kann Frequenzen von 6,6 GHz bis 10 GHz erzeugen, die dann mittels Frequenz-Vervierfacher auf ein Spektrum von 26,4 GHz bis 40 GHz vergrößert werden. Das Spektrum befindet sich also im Mikrowellenbereich. Welche Frequenz er ausgeben soll, wird mittels einer Steuerspannung von 0V-10V eingestellt. Das bedeutet bei 0V Eingangsspannung strahlt der Sender mit einer Frequenz von 26,4 GHz und bei 10V mit einer Frequenz von 40 GHz. Man kann sich daraus leicht Formeln zum Umrechnen bestimmen:

| Steuerspannung -> GHz           | GHz -> Steuerspannung                 |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| $f [GHz] = 1,36 * U [V] + 26,4$ | $U [V] = \frac{f [GHz] - 26,4}{1,36}$ |

Tab.1: Umrechnung Spannung <-> GHz

Der Rampengenerator wird nun dazu verwendet, ein Sägezahnsignal mit 0V-10V Spannung auszugeben, das einerseits dazu verwendet wird den Oszillator periodisch von 26,4 GHz bis 40 GHz durchzuschalten und andererseits wird damit die X-Auslenkung des Oszilloskops angesteuert, das im XY-Modus betrieben wird.

Der Empfänger ist mit der Y-Auslenkung des Oszilloskops verbunden und diese zeigt somit zu jedem Zeitpunkt die empfangene Leistung an.

Dieser Aufbau ermöglicht es somit am Oszilloskop zu verfolgen welche Frequenzen (x-Richtung) mit welcher Leistung (y-Richtung) empfangen werden. Tatsächlich handelt es sich natürlich bei beiden Richtungen um Volt, die aber entsprechend interpretiert werden können. Nachfolgend ein Beispiel, wie das Spektrum am Oszilloskop aussieht:

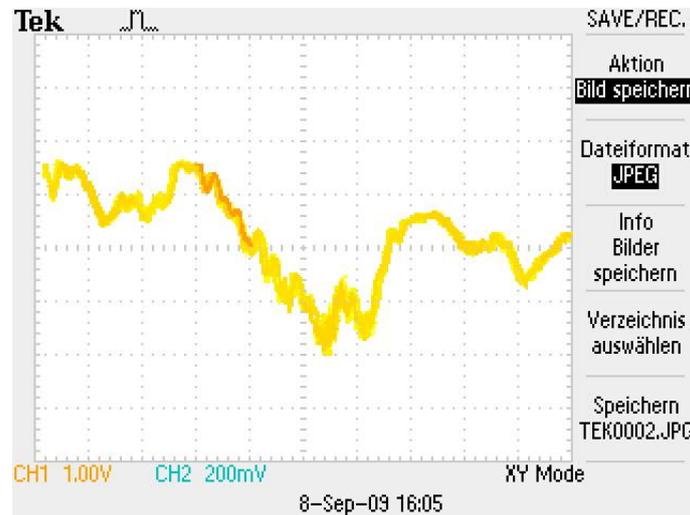


Abb.16: Spektrum am Oszilloskop

Man kann in Abbildung 2 am unteren linken Rand die Skalierungseinstellungen ablesen. Der Eingang an den der Rampengenerator angeschlossen ist (Channel 1/X-Richtung) wird mit 1V pro Kästchen angezeigt, das bedeutet man sieht hier alle Frequenzen vom linken Rand, 0V entspricht 26,4 GHz, bis zum rechten Rand, 10V entspricht 40 GHz.

Channel 2, also die Leistungsmessung ist hier momentan auf 200mV pro Kästchen gestellt. Natürlich können diese Einstellungen nach eigenem Ermessen verändert werden.

## Bragg-Reflexion

### Vorbereitungen

Bevor mit dem Messen begonnen wird sollte, man die im Theorieteil geschilderten Berechnungen anstellen und die daraus folgenden Konsequenzen ziehen. Um sich nicht auf die Messung bei einer Frequenz zu verlassen, soll bei zwei weiteren Frequenzen gemessen werden.

Für die Messung muss der Kristall so platziert werden, dass die Längsseite ohne Störstelle zu den Hörnern gerichtet ist. Weiters ist darauf zu achten, dass der Kristall so auf dem Tisch verschoben wird, dass sich die Längsseite genau über dem Drehpunkt für die Arme der Messvorrichtung befindet.

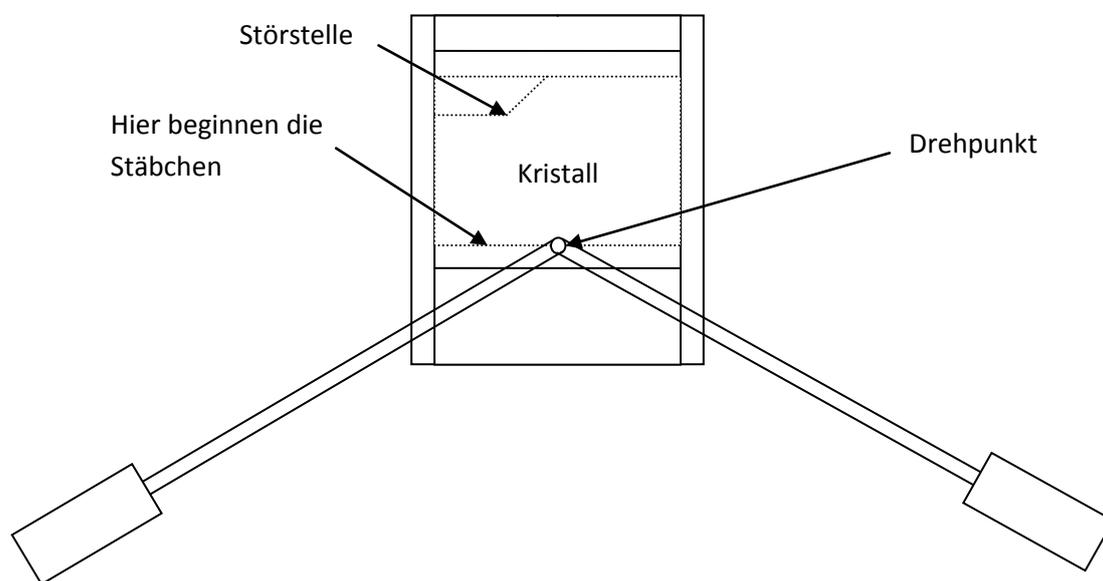


Abb.17: Bragg-Reflexion am photonischen Kristall

### Durchführung der Messung

Einigt man sich darauf die erste Messung bei 8V Eingangsspannung (entspricht 37,28 GHz) durchzuführen, sollte ein Student das Oszilloskop in diesem Bereich beobachten und der Kollege die Arme der Messvorrichtung gleichmäßig, Grad für Grad, symmetrisch zusammenbewegen oder auseinanderbewegen. Irgendwo zwischen  $60^\circ$  und  $85^\circ$  ist ein Maximalwert zu finden. Es empfiehlt sich den Bereich, eben beispielsweise bei 8V herauszuzoomen, um genauer beobachten zu können, was mit dem Oszilloskop leicht möglich ist.

Wichtig: Ziel ist es nicht, bei einem Winkel einen Maximalausschlag bei irgendeiner Frequenz zu finden, sondern bei einer bestimmten Frequenz einen Winkel zu finden, bei dem die Ausgangsspannung bei dieser Frequenz maximal ist.

## Auswertung

In einer Tabelle sollen die Werte z.B. in 5° Schritten und beim Maximum notiert werden, also Wertepaare, Winkel/Spannung am Oszilloskop, wobei dieser am Oszilloskop abgelesene y-Wert proportional der empfangenen Leistung ist.

Für das Protokoll sind entsprechende Diagramme anzufertigen, wo dann der der Leistung proportionale Volt-Wert über dem Winkel grafisch dargestellt wird. Weiters ist die im Theorieteil geschilderte Berechnung des Netzebenenabstands durchzuführen. Etwaige Abweichungen des Ergebnisses von der Messung mit dem Lineal sind wahrscheinlich durch die im Gegensatz zu außerhalb des Kristalls andere Phasengeschwindigkeit der EM Wellen im Kristall zu erklären.

## Transmission durch den Kristall

Ziel dieses Versuchs ist es, die Bandlücke sichtbar zu machen. Bevor die Transmission gemessen wird ist allerdings eine Vergleichskurve ohne Kristall aufzunehmen. Hierzu werden die Arme so ausgeschwenkt, dass der Sender direkt zum Empfänger strahlt.

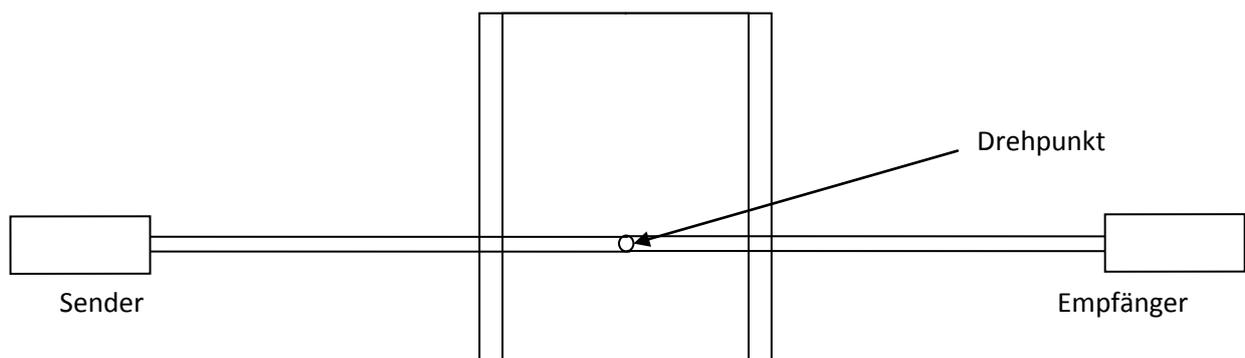


Abb.18: Vergleichskurve ohne Kristall messen

Auf dem Oszilloskop müsste jetzt eine Kurve ohne Bandlücke angezeigt werden. Es empfiehlt sich hier eine Aufnahme der Kurve auf einem USB-Stick für das Protokoll zu speichern.

Als nächstes ist die Transmission durch den Kristall zu messen. Die Arme der Vorrichtung bleiben in der gleichen Stellung. Der Kristall muss so auf dem Messtisch platziert werden, dass die Wellen nicht durch die Störstelle gehen:

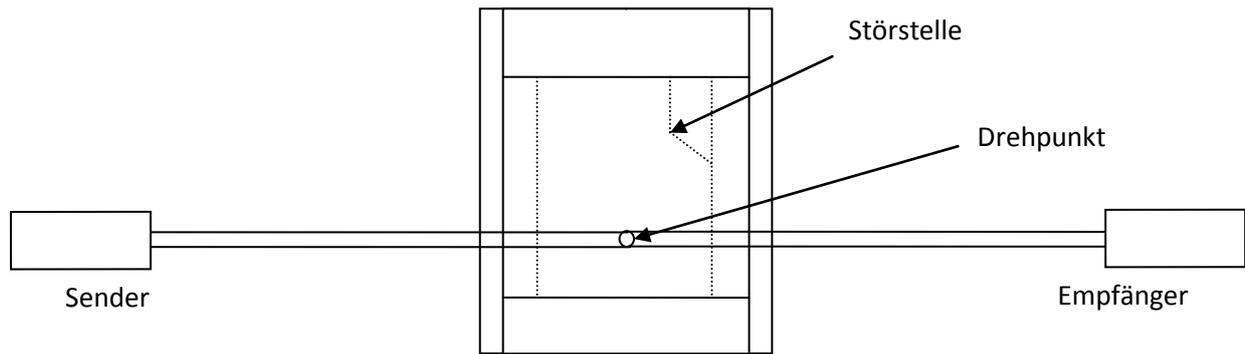


Abb.19: Aufnahme der Transmissionskurve

Jetzt sollte eine deutliche Bandlücke gemessen werden. Für das Protokoll ist wieder ein Bild der Kurve auf einem USB-Stick zu sichern.

### **Störstellenleitung**

Als nächstes soll die Störstellenleitung nachgewiesen werden. Wie im Theorieteil bereits beschrieben wurde, müssten durch den Liniendefekt auch verbotene Frequenzen durchkommen. Bevor durch den Liniendefekt gesendet wird ist es allerdings wieder notwendig, eine Vergleichskurve zu messen.

Da ein geradliniger Defekt bei den anderen Versuchen gestört hätte und auch weniger spektakulär ist als ein geknickter, wurde der Knick an einer Ecke des Kristalls eingebaut. An der

dem Defekt diagonal gegenüberliegenden Seite wird die Vergleichskurve aufgenommen:

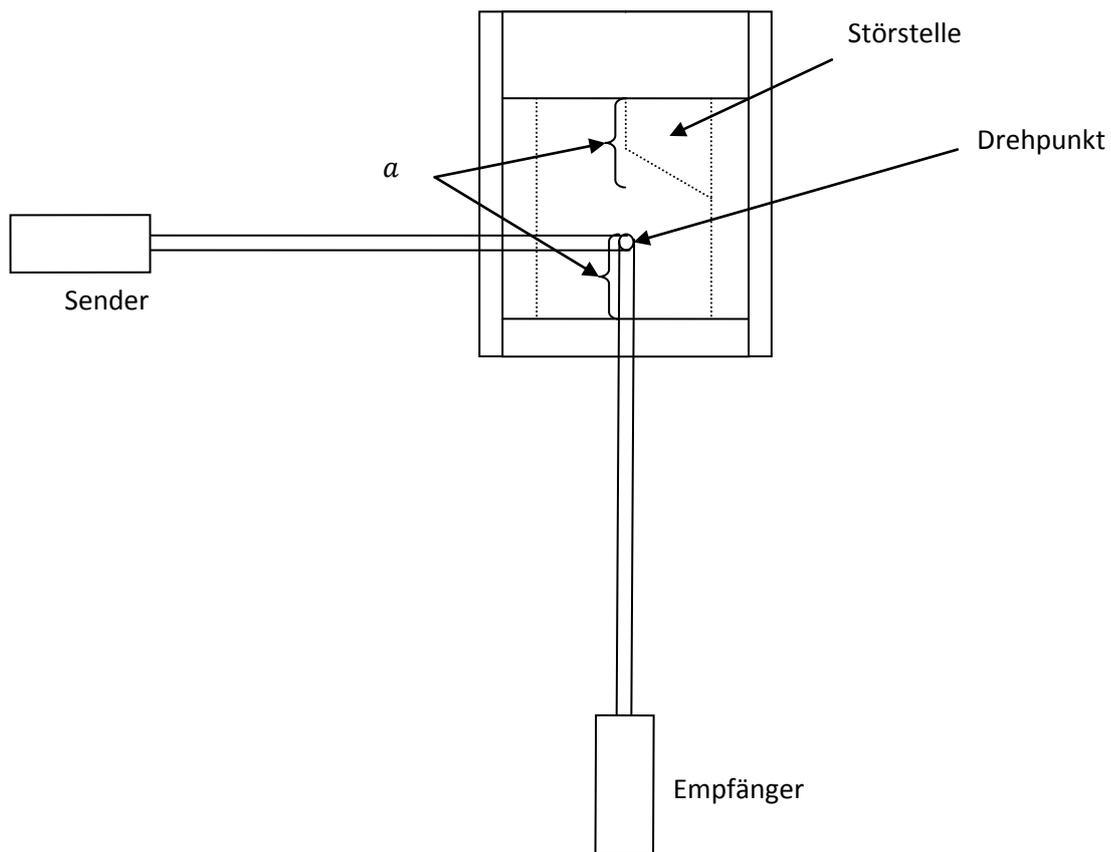


Abb.20: Vergleichskurve für Störstellenleitung

Es ist darauf zu achten, dass der Abstand vom Rand des Kristalls zum Drehpunkt (in Abbildung 3 genannt  $a$ ) gleich dem Abstand vom gegenüberliegenden Rand des Kristalls bis zur Höhe des Eintritts der Störstelle in den Kristall auf der Längsseite ist.

Diese Kurve wird eine Bandlücke aufweisen und ist wiederum für das Protokoll zu sichern.

Als nächstes ist nun der Kristall um  $180^\circ$  zu drehen, damit sich der Knick der Störstelle genau über dem Drehpunkt befindet:

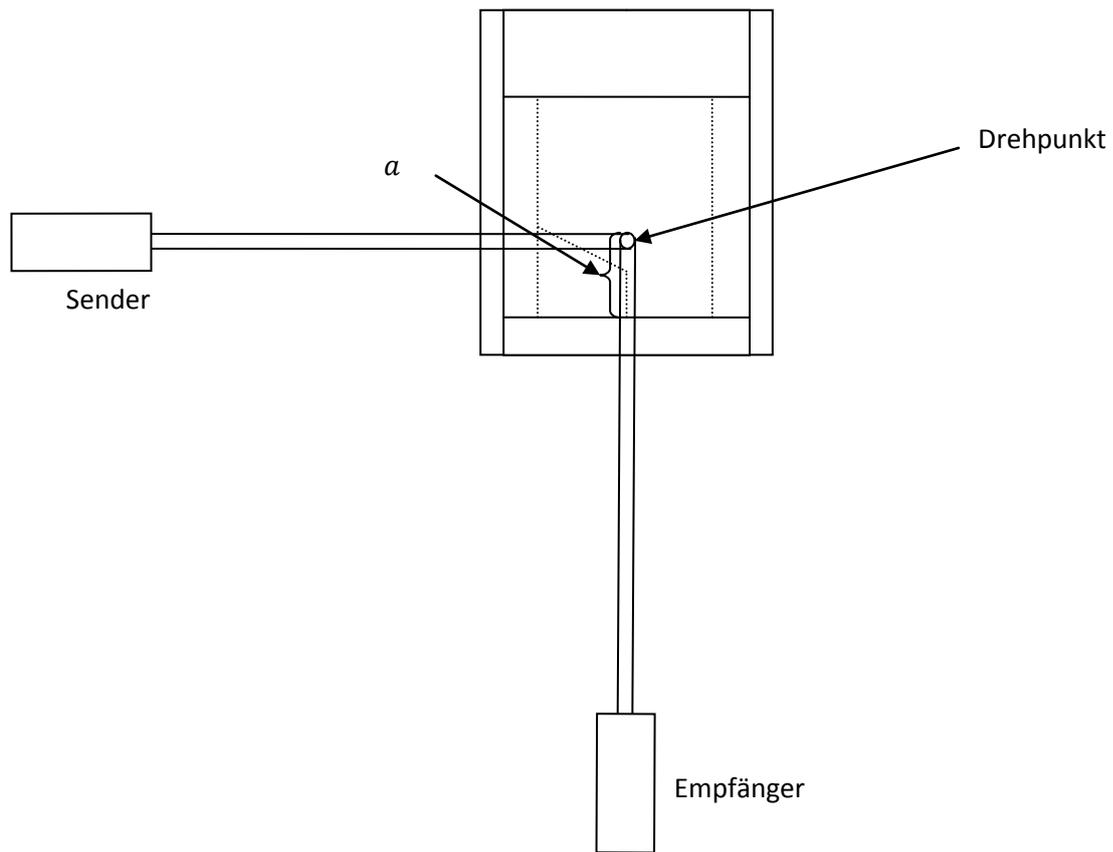


Abb.21: Transmission durch Störstelle

Nun müsste man am Oszilloskop eine weniger stark ausgeprägte Störstelle messen als bei der Vergleichskurve. Für das Protokoll ist wiederum eine Kurve zu sichern. Der Effekt der Störstellenleitung ist hier aber leider nur sehr schwer messbar, da die Leistung Störstellenleitung nur in der Größenordnung der Rauschleistung liegt.

## Quellenangaben

- [1] Wikipedia  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Bragg-Reflexion>; 15.9.2009
- [2] Jan Ebser: Photonische Kristalle – Seminar „Moderne Photonik und Faseroptik“;  
15.1.2008
- [3] Steven G. Johnson, J.D. Joannopoulos – Introduction to Photonic Crystals: Bloch's  
Theorem, Band Diagrams and Gaps; 3.2.2003
- [4] Hochschulbibliothek: Hochschulschriften der Universität Halle  
<http://sundoc.bibliothek.uni-halle.de/diss-online/04/04H153/t3.pdf>; 16.9.2009
- [5] Hochschulbibliothek: Hochschulschriften der Universität Halle  
<http://sundoc.bibliothek.uni-halle.de/diss-online/02/02H139/t3.pdf>; 17.9.2009
- [6] Lichttechnisches Institut der Universität Karlsruhe  
[http://www.lti.uni-karlsruhe.de/rd\\_download/Quantenbau\\_Kapitel5.pdf](http://www.lti.uni-karlsruhe.de/rd_download/Quantenbau_Kapitel5.pdf); 14.9.2009
- [7] Charles Kittel – Einführung in die Festkörperphysik, 13.Auflage